2. TRANSVERSALUMO SĄLYGOS

Kintamų integravimo rėžių atvejis. Uždavinio formulavimas

Nagrinėkime tokį variacinį uždavinį

$$\begin{gathered}\operatorname*{extr}_{a,b,y(x)} \int_a^b F\left(x, y(x), y'(x)\right) dx, \\ \varphi(a, y(a)) = 0,\ \psi(b, y(b)) = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

čia $\varphi(x,y),\ \psi(x,y)$ – žinomos funkcijos. Geometriškai šį uždavinį galima interpretuoti taip: ieškomi skaičiai $a,\ b$ ir tokia kreivė $y = y(x)$, kuri suteikia integralui (1) ekstremumą, kai šios kreivės kraštiniai taškai $A(a, y(a))$ ir $B(b, y(b))$ gali judėti duotomis kreivėmis $\varphi(x,y) = 0,\ \psi(x,y) = 0$.

Tarkime, kad radome tokio uždavinio sprendinį. Tegul rasta kreivė $y = y(x)$ įgyja rastuose taškuose $a,\ b$ reikšmes $y(a) = A,\ y(b) = B$. Tada $y = y(x)$ yra ir variacinio uždavinio

$$\begin{gathered}\operatorname*{extr}_{y(x)} \int_a^b F\left(x, y(x), y'(x)\right) dx, \\ y(a) = A,\ y(b) = B,\end{gathered}$$

sprendinys, todėl ji tenkina Eulerio lygtį, t.y. integralo (1) ekstremalė.

Transversalumo sąlygos

Taigi sprendžiant (1) uždavinį visų pirma randami visi Eulerio lygties $F'_y\left(x, y, y'\right) - \dfrac{d}{dx} F'_{y'}\left(x, y, y'\right) = 0$ sprendiniai, nes tik jie gali suteikti šiam uždaviniui ekstremumą, be to, jie aplamai priklauso nuo 2 konstantų $y = y(x, c_1, c_2)$. Šių konstantų radimui yra išvestos taip vadinamos *transversalumo sąlygos*

$$\left.\left(F - y'F'_{y'}\right)\varphi'_y - F'_{y'}\varphi'_x\right|_{y = y(x, c_1, c_2)} = 0, \qquad (\text{ kai } x = a),$$

$$\left.\left(F - y'F'_{y'}\right)\psi'_y - F'_{y'}\psi'_x\right|_{y = y(x, c_1, c_2)} = 0, \qquad (\text{ kai } x = b).$$

Kadangi kreivės $\varphi(x,y) = 0$ liestinės vektorius $\boldsymbol{t} = \left[\varphi'_y; -\varphi'_x\right]$, tai *transversalumo sąlyga* nurodo, kad vektorius $\left[\left(F - y'F'_{y'}\right), F'_{y'}\right]$ turi būti statmenas šiai kreivei taške $A(a, y(a))$.

Pavyzdys. Rasti uždavinio

$$\int_0^b y'^2 + y'^3\, dx,\ \ y(0) = -1,\ \ y(b) = b + b^2$$

ekstremales.

Sprendimas. Ieškomos ekstremalės turi tenkinti Eulerio lygtį:

$$F'_y\left(x,y,y'\right)-\frac{d}{dx}F'_{y'}\left(x,y,y'\right)=-2y''\left(1+3y'\right)=0$$

kurios bendrasis sprendinys

$$y=c_1x+c_2$$

Remiantis kraštinėmis sąlygomis sudarome 2 lygtis su 3 nežinomaisiais c_1, c_2, b :

$$\begin{aligned} x=0: &\qquad y(0)=c_2=-1,\\ x=b: &\qquad y(b)=c_1b+c_2=b+b^2 \end{aligned}$$

Trečiąją lygtį sudarome panaudodami transversalumo sąlyga taške $x=b$:

$$\left(-c_1^2-2c_1^3\right)\cdot 1+\left(2c_1^2+3c_1^3\right)(2b+1)=0$$

nes

$$\left(F-y'F'_{y'}\right)\Bigg|_{y\,=\,c_1x\,+\,c_2}=-y'^2-2y'^3\Bigg|_{y\,=\,c_1x\,+\,c_2}=-c_1^2-2c_1^3,$$

$$y'F'_{y'}\Bigg|_{y\,=\,c_1x\,+\,c_2}=2y'^2+3y'^3\Bigg|_{y\,=\,c_1x\,+\,c_2}=2c_1^2+3c_1^3,$$

$$\psi(x,y)=y-(x^2+x);\quad \psi'_x\Bigg|_{x\,=\,b}=-(2b+1);\quad \psi'_y\Bigg|_{x\,=\,b}=1.$$

Gautoji sistema:

$$\begin{cases} c_2=-1,\\ c_1b+c_2=b+b^2,\\ \left(-c_1^2-2c_1^3\right)\cdot 1+\left(2c_1^2+3c_1^3\right)(2b+1)=0 \end{cases}$$

turi 2 sprendinius

$$\begin{aligned} &c_1=c_2=b=-1,\\ &c_1=3{,}33449x,\;\; c_2=-1,\;\; b=0,56520, \end{aligned}$$

Taigi, uždavinio sąlygas tenkina 2 ekstremalės ir atitinkančios jas parametro b reikšmės:

$$\begin{aligned} &y=-x-1,\;\; b=-1,\\ &y=3,33449x-1,\;\; b=0,56520. \end{aligned}$$

Transversalumo sąlygos daugiamačiu atveju

Sprendžiant variacinį uždavinį kai funkcionalas priklauso nuo kelių funkcijų, pavyzdžiui

$$\underset{a,b,\boldsymbol{y}(x)}{\operatorname{extr}} \int_a^b F\left(x, \boldsymbol{y}(x), \boldsymbol{y}'(x)\right) dx, \;\; \boldsymbol{y}(x) = [y_1(x), \dots, y_n(x)]$$

kai taškas $A(a, \boldsymbol{y}(a))$ arba $B(b, \boldsymbol{y}(b))$ gali judėti tam tikru geometriniu objektu, transversalumo sąlygos formuluojamos panašiai nagrinėtam: ekstremalėje $\boldsymbol{y}(x) = [y_1(x), \dots, y_n(x)]$ vektorius

$$\left[\left(F - y_1' F'_{y_1'} - \dots - y_n' F'_{y_n'}\right), F'_{y_1'}, \dots, F'_{y_n'}\right],$$

turi būti statmenas šio taške geometrinio objekto kiekvienai liestinei, atitinkamai, taške $A(a, y(a))$ arba $B(b, \boldsymbol{y}(b))$.

Kai tuo geometriniu objektu yra erdvinė kreivė

$$\begin{cases} y = \eta(x), \\ z = \zeta(x), \end{cases}$$

tai taške $x = a$ jos liestinės vektorius $\boldsymbol{t} = \left[1, \eta'(a), \zeta'(a)\right]$ turi būti statmenas vektoriui $\left[\left(F - y' F'_{y'} - z' F'_{z'}\right), F'_{y'}, F'_{z'}\right]$, apskaičiuotame ekstremalėje, t.y.

$$\left(F - y' F'_{y'} - z' F'_{z'}\right) + \eta'(a) F'_{y'} + \zeta'(a) F'_{z'} = 0\,.$$

Paviršiaus

$$w(x, y, z) = 0$$

atveju, minėtam vektoriui turi būti statmena kiekviena jo liestinė, todėl transversalumo sąlyga sutampa su paviršiaus normalės $[w'_x, w'_y, w'_z]$ lygiagretumo šiam vektoriui sąlyga:

$$\frac{F - y' F'_{y'} - z' F'_{z'}}{w'_x} = \frac{F'_{y'}}{w'_y} = \frac{F'_{z'}}{w'_z}. \tag{2}$$

Pavyzdys. Rasti atstumą nuo taško $P(-5; 8; 30)$ iki paviršiaus $w(x, y, z) \equiv z - \dfrac{xy}{20} = 0$.

Sprendimas. Formuluokime šį uždavinį kaip variacinį:

$$\min_{a,b,y(x),z(x)} \int_a^b \sqrt{1 + {y'_x}^2 + {z'_x}^2}\, dx$$

Pradžioje rasime ekstremales. Jos turi tenkinti Eulerio lygtis:

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx}F_{y'} = 0 - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y'}{F}\right) = 0, \\ F_z - \dfrac{d}{dx}F_{z'} = 0 - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{z'}{F}\right) = 0, \end{cases}$$

Iš čia $\dfrac{y'}{F} = k_1$, $\dfrac{z'}{F} = k_2$, t.y. $z' = ky'$, todėl pirmąją Eulerio lygtį galima perrašyti taip

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(1+k^2)y'^2}}\right) = \frac{y''\sqrt{1+(1+k^2)y'^2} - y'\dfrac{(1+k^2)y'}{\sqrt{1+(1+k^2)y'^2}}y''}{\left(\sqrt{1+(1+k^2)y'^2}\right)^2} =$$

$$\frac{y''}{\sqrt{1+(1+k^2)y'^2}^{\,3}} = 0.$$

Taigi $y'' = 0$, kadangi $z' = ky'$, tai ir $z'' = 0$, todėl visos ekstremalės yra tiesės:

$$\begin{cases} y = c_1 x + c_2, \\ z = c_3 x + c_4. \end{cases}$$

Sudarykime lygčių sistemą. Taškas $P(-5, 8, 30)$ yra ekstremalės taškas:

$$\begin{cases} 8 = c_1(-5) + c_2, \\ 30 = c_3(-5) + c_4, \end{cases}$$

ekstremalė kerta paviršių nežinomame taške $Q(x_2, y_2, z_2)$:

$$\begin{cases} y_2 = c_1 x_2 + c_2, \\ z_2 = c_3 x_2 + c_4, \\ z_2 - \dfrac{x_2 y_2}{20} = 0, \end{cases}$$

ekstremalėje išpildomos transversalumo sąlygos (2):

$$\frac{1}{y_2/20} = \frac{c_1}{x_2/20} = \frac{c_3}{1}.$$

Išvardintų 7 lygčių sistemoje yra 7 nežinomieji $c_1, c_2, c_3, c_4, x_2, y_2, z_2$. Išsprendę sistemą gauname 3 spredinius. Tuo galime įsitikinti pasitelkus paketą Maple:

```
> s:=solve({sistema}):
> sp:=map(evalf@allvalues,[s]);
```

Natūraliosios kraštinės sąlygos

Transverslumo sąlygos tampriai susietos su tokiu uždaviniu: kokias kraštinės sąlygas turi tenkinti funkcija $y = y(x)$, jei žinoma, kad ji suteikia ekstremumą funkcionalui

$$\int_a^b F\left(x, y(x), y'(x)\right) dx \tag{3}$$

čia a ir b yra žinomi skaičiai.

Tokį uždavinį galima interpretuoti taip: ieškomi tokia kreivė $y = y(x)$, kuri suteikia integralui (1) ekstremumą, kai šios kreivės kraštiniai taškai $A(a, y(a))$ ir $B(b, y(b))$ gali judėti duotomis tiesėmis $\varphi(x,y) \equiv x - a = 0,\ \psi(x,y) \equiv x - b = 0$. Kaip minėjome, funkcija $y = y(x)$ turi būti Eulerio lygties sprendiniu ir šiuo atveju tenkinti tokias transverslumo sąlygas

$$\left(F - y'F'_{y'}\right)\varphi'_y - F'_{y'}\varphi'_x \Big|_{y\,=\,y(x)} = -F'_{y'}\Big|_{y\,=\,y(x)} = 0 \text{, kai } x = a\,,$$

$$\left(F - y'F'_{y'}\right)\psi'_y - F'_{y'}\psi'_x \Big|_{y\,=\,y(b)} = -F'_{y'}\Big|_{y\,=\,y(b)} = 0 \text{, kai } x = b\,.$$

Taigi, jei $y = y(x)$ suteikia integralui (3) ekstremumą, tai

$$F_{y'}\Big|_{y\,=\,y(x)} = 0 \text{, kai } x = a \text{ ir kai } x = b$$

Šios sąlygos vadinamos *natūraliosiomis kraštinėmis sąlygomis*.

Pavyzdys. Rasti uždavinio

$$\operatorname{extr} \int_0^{\ln 2} 6e^x y' + 3y^2 + (y' - y)^2 \, dx\,.$$

ekstremales.

Sprendimas. Eulerio lygties $y'' - 4y' = -3e^x$ bendrasis sprendinys $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + e^x$ turi tenkinti natūraliąsias kraštines sąlygas

$$F'_{y'}\Big|_{y\,=\,y(x)} = 2y' - 2y + 6e^x\Big|_{y\,=\,y(x)} = -6c_1 e^{-2x} + 2c_2 e^{2x} + 6e^x = 0\,,$$

kai $x = 0$ ir kai $x = \ln 2$, todėl

$$\begin{cases} -6c_1 + 2c_2 + 6 = 0, \\ \dfrac{-3}{2} c_1 + 8c_2 + 12 = 0, \end{cases}$$

Iš čia $c_1 = \dfrac{-7}{5} e^{2x},\ c_2 = \dfrac{8}{15}$ ir $y(x) = \dfrac{-7}{5} e^{2x} + \dfrac{8}{15} e^{-2x} + e^x$.

Pastaba. Jeigu variaciniame uždavinyje formuluojama tik viena kraštinė sąlyga, pavyzdžiui

$$\begin{aligned} &\operatorname{extr} \int_0^{\ln 2} 6e^x y' + 3y^2 + (y' - y)^2 \, dx, \\ &y(0) = A, \end{aligned},$$

tai reikėtų spręsti lygčių sistemą, sudarytą remiantis viena natūraliąja ir viena kraštine sąlygomis:

$$\begin{cases} c_1 + \ c_2 + \ 1 = A, \\ \frac{-3}{2} c_1 + 8c_2 + 12 = 0. \end{cases}$$